Del Algebra Lineal y las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias al Análisis Funcional y las Ecuaciones Diferenciales Parciales

Dr. L. Héctor Juárez Valencia
Departamento de Matemáticas, UAM–I

Índice

Resumen

En este taller se pretende mostrar como resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales, utilizando el cálculo y el álgebra lineal. Despúes, se utilizan las mismas ideas para resolver las ecuaciones diferenciales parciales lineales mas sencillas, utilizando el calculo variacional y aspectos elementales del análisis funcional.

1. Sistema de masas y resortes en equilibrio

Considérese un sistema de dos masas m_1, m_2 unidas por tres resortes con constantes de rigidez k_1, k_2, k_3, sujetos en dos extremos opuestos fijos, como se ilustra en la Figura 1. El sistema se encuentra suspendido en equilibrio bajo la acción de la gravedad, y se supone que los resortes tienen masa despreciable. La gravedad ocasiona que las masas se muevan a las posiciones x_1 y x_2, ocasionando los desplazamientos u_1, u_2 por la deformación de los resortes.

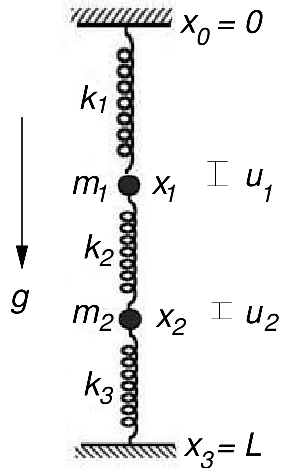

Figura 1: Sistema de dos masas y tres resortes en equilibrio bajo la acción de la gravedad

1.1. Derivación de un modelo matemático

Considérese el problema de calcular los desplazamientos u_1, u_2 de las masas m_1, m_2, en términos de la fuerzas externas $f_1 = m_1 g$, $f_2 = m_2 g$ sobre las masas, siendo g la aceleración de la gravedad. Las variables involucradas en el problema son:

1. Desplazamiento de las masas: u_1, u_2.
2. Deformación de los resortes: e_1, e_2, e_3.
3. Fuerzas internas (de restitución) sobre los resortes: σ_1, σ_2, σ_3.
4. Fuerzas externas (por acción de la gravedad) sobre las masas: f_1, f_2.

Para derivar el modelo de equilibrio se siguen los siguientes pasos:

- Se establece la relación entre las deformaciones de los resortes y los desplazamientos de las masas:

  $$e_i = u_i - u_{i-1}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

  Es decir, para medir cuanto se estira o comprime un resorte, simplemente se calculan las diferencias del desplazamiento de las masas localizadas sobre sus extremos. Como el primer resorte está fijo en la parte superior, se define $u_0 = 0$. Análogamente, como el tercer resorte esta fijo en el extremo inferior, se define $u_3 = 0$.

- Se utiliza la ley de Hooke para establecer la relación entre fuerzas de restitución de los resortes y la deformación de los mismos. La ley de Hooke establece que la fuerza de restitución que actúa sobre un resorte es proporcional al tamaño de su deformación:

  $$\sigma_i = k_i \, e_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

  Suponiendo que cada resorte esta hecho de material uniforme, entonces la rígidez k_i de cada resorte i es constante.

- Se obtiene la ecuación de equilibrio, realizando el balance de fuerzas sobre las masas:

  $$f_i = \sigma_i - \sigma_{i+1}, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

  Es decir, el peso f_i de la masa m_i balancea la fuerza que los resortes ejercen sobre ella.

Utilizando la siguiente notación vectorial

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix},$$

las ecuaciones (1), (2) y (3) se pueden expresar respectivamente en la forma matricial:

$$\mathbf{e} = D\,\mathbf{u}, \quad \boldsymbol{\sigma} = K\,\mathbf{e}, \quad \mathbf{f} = D^T\boldsymbol{\sigma}, \tag{4}$$

en donde

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

De (4) se encuentra la ecuación del equilibrio

$$\mathbf{f} = D^T\boldsymbol{\sigma} = D^T K\,\mathbf{e} = D^T K D\,\mathbf{u}$$

Para simplificar la notación, se denotará por A a la matriz $D^T KD$. Entonces, los desplazamientos de las masas se pueden calcular resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$A\mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{6}$$

en donde

$$A = D^T K\,D = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f} = g\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix}.$$

La solución de la ecuación (6) es única ya que la matriz A es simétrica y definida positiva, debido a que $k_1 + k_2 > 0$ y $\det A = k_1\,k_2 + k_1\,k_3 + k_2\,k_3 > 0$. En algunas ocasiones se utiliza la notación $A = A^T > 0$ para indicar que la matriz A es simétrica ($A = A^T$) y definida positiva ($A > 0$).

La ecuación de equilibrio (6) contiene del lado izquierdo las fuerzas que los resortes ejercen sobre las masas ($A\mathbf{u}$) y del lado derecho las fuerzas de gravedad sobre las masas ($\mathbf{f}$). Por lo tanto, dicha ecuación establece que, *en el equilibrio, las fuerzas que los resortes ejercen sobre la masas son iguales y en sentido opuesto a las fuerzas que la gravedad ejerce sobre las mismas.*

Nota. Se utilizarán algunos resultados elementales del álgebra lineal a lo largo de esta exposición, por lo que se recomienda repasar los conceptos utilizados en algún texto de álgebra lineal, por ejemplo [1]. Para profundizar en los temas que se cubren en este taller se recomienda el libro sobre matemáticas aplicadas [2].

Generalización del modelo

Cuando se consideran n masas suspendidadas y acopladas por medio de $n+1$ resortes, se puede verificar fácilmente que las relaciones matriciales (4) se siguen cumpliendo, sólo que ahora las matrices son

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = g\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix}, \tag{7}$$

en donde D es una matriz rectangular de $(n+1)\times n$ y K una matriz cuadrada de $(n+1)\times(n+1)$. Los desplazamientos $u_1, u_2, \ldots, u_n$ se calculan resolviendo el sistema de ecuaciones (6), con la matriz cuadrada $A = D^T K D$ de $n \times n$ siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_{n-1}+k_n & -k_n \\ 0 & 0 & \cdots & -k_n & k_n+k_{n+1} \end{bmatrix} \tag{8}$$

la cual es también una matriz simétrica y definida positiva y, por lo tanto, invertible.

1.2. Energía potencial del sistema y principio del mínimo

El sistema en equilibrio de masas y resortes suspendidos bajo la acción de la gravedad satisface un principio fundamental: *el trabajo interno de deformación de los resortes debe ser igual al trabajo externo hecho sobre las masas.* A continuación trataremos de explicar esta propiedad con detalle:

Trabajo interno sobre los resortes (por la deformación) $= \sum_{i=1}^n \sigma_i\, e_i = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}\rangle$.

Trabajo externo sobre las masas (por acción de la gravedad) $= \sum_{i=1}^n f_i\, u_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle$.

El símbolo $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto interno en $\mathbb{R}^n$. Para verificar que los anteriores productos son iguales, se utilizan las relaciones (4), obteniendo

$$\langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e}\rangle = \langle D\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}\rangle = \langle \mathbf{u}, D^T\boldsymbol{\sigma}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{f}\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle. \tag{9}$$

Aqui hay dos propiedades implícitas importantes y que vale la pena destacar:

1. La matriz que conecta la fuerza $\boldsymbol{\sigma}$ con $\mathbf{f}$ en (4) es la transpuesta de la que conecta $\mathbf{u}$ con $\mathbf{e}$.
2. El producto interior es una forma adecuada para definir la transpuesta de una matriz. Si se piensa la matriz D como una transformación, entonces la transpuesta D^T es otra transformación a la que se llama la transformación adjunta y satisface $\langle \boldsymbol{\sigma}, D\mathbf{u}\rangle = \langle D^T\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}\rangle$.

Por otro lado, la matriz simétrica y definida positiva, $A = D^T K D$, aparece en el principio del mínimo subyacente a el estado de equilibrio del sistema de masas y resortes: *los resortes buscan la posición en la cual la energía potencial total (de masas y resortes) es mínima* como se muestra a continuación.

La energía potencial de las masas es:

$$-\sum_{i=1}^n m_i\, g\, u_i = -\sum_{i=1}^n f_i\, u_i = -\langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle, \tag{10}$$

en donde en signo menos indica que se requiere trabajo externo para llevar a las masas a su posición original (es decir, a la posición que tendrían en ausencia de gravedad). La energía potencial asociada a los resortes es:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} k_i e_i^2 = \frac{1}{2}\langle K\mathbf{e}, \mathbf{e}\rangle = \langle KD\mathbf{u}, D\mathbf{u}\rangle = \frac{1}{2}\langle D^T KD\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle, \tag{11}$$

la cual es positiva, debido a que cuando se quitan las masas (en decir, ausencia de gravedad) los resortes ceden trabajo. Por lo tanto, la energía potencial total es la suma de las dos anteriores:

$$p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle \tag{12}$$

Esta es una función cuadrática con matriz Hessiana A definida positiva. Por lo tanto, tiene un único mínimo global, y para calcularlo es suficiente con encontrar el vector de desplazamientos $\mathbf{u}$ en donde el gradiente $\nabla p(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} - \mathbf{f}$ se anula. Es decir, el vector de desplazamientos de equilibrio, el cual resuelve el sistema de ecuaciones (6), minimiza la energía potencial total del sistema en equilibrio.

1.3. Solución del sistema de ecuaciones lineales

De acuerdo a lo anterior, para encontrar el equilibrio de un sistema discreto de masas y resortes bajo la acción de la gravedad, se puede proceder de dos maneras:

1. Resolver el sistema de ecuaciones $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ (balance de fuerzas).
2. Minimizar la función cuadrática $p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}\rangle$ (minimizar la energía potencial total),

en donde $A = A^T > 0$. Los dos procedimientos anteriores son equivalentes, por lo que tenemos varias opciones para resolver el problema [3]:

- *El método de Choleski*, el cuál es un método directo de factorización para resolver sistemas lineales con matrices $A = A^T > 0$.
- *El método de gradiente conjugado*, el cuál es un método iterativo, para encontrar el mínimo de una función cuadrática con matriz Hessiana $A = A^T > 0$.
- Si además la matriz A es tridiagonal, el algoritmo más efectivo para resolver el sistema de ecuaciones es *el método de Thomas* (ver [4]).
- En los casos en que se estudian sistemas dinámicos, como lo haremos en la próxima sección, se requiere del cálculo de los valores y vectores propios de la matriz A. Aunque el cálculo de valores y vectores propios es un problema considerablemente más difícil, desde el punto de vista computacional, también es posible resolver el sistema de ecuaciones a partir del conocimiento de ellos.

Es conveniente terminar esta sección mostrando como se resuelve un sistema de ecuaciones lineales $A\,\mathbf{u} = \mathbf{f}$, con $A = A^T > 0$, cuando los valores y vectores propios son conocidos. Aunque no es típico resolver sistema de ecuaciones lineales a partir del conocimiento de los valores y vectores propios, aquí lo haremos motivados por dos razones: una, es que es útil en la solución de problemas dinámicos, como veremos en la Sección 2; otra razón es que esta técnica es común en la solución de ecuaciones diferenciales que modelan problemas estáticos en medios continuos, como veremos en la Sección 3.

La clave es hacer uso de las *coordenadas naturales* del problema, las cuáles están determinadas por los vectores propios de la matriz A. Debido a que la matriz A es simétrica, existen n vectores propios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ los cuales forman un sistema ortogonal completo en $\mathbb{R}^n$, es decir son vectores linealmente independientes, mutuamente ortogonales, y generan $\mathbb{R}^n$. Por otro lado, como $A > 0$ sus valores propios son positivos y se pueden ordenar en la forma $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Estos resultados permiten llevar a cabo el siguiente procedimiento.

- La solución $\mathbf{u}^*$ debe ser combinación lineal de los vectores propios:

$$\mathbf{u}^* = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathbf{u}_i, \tag{13}$$

  en donde los coeficientes a_i se deben determinar.

- Sustituyendo en la ecuación lineal $A\mathbf{u}^* = \mathbf{f}$, y recordando que $A\,\mathbf{u}_i = \lambda_i\,\mathbf{u}_i$, se obtiene

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\,\lambda_i\,\mathbf{u}_i = \mathbf{f}.$$

- Los coeficiente a_i se obtienen utilizado la ortogonalidad de los vectores propios

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} a_i\,\lambda_i\,\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \right\rangle = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_j\rangle \quad\Longrightarrow\quad a_j = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_j\rangle}{\lambda_j \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j\rangle}, \quad \forall\; j = 1, 2, \ldots n.$$

Si además normalizamos los vectores propios, la anterior expresión para las a_j se puede simplificar, ya que en ese caso $\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j\rangle = \|\mathbf{u}_j\|^2 = 1$.

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones $A\,\mathbf{u} = \mathbf{f}$ esta dada por la siguiente expresión muy simple

$$\mathbf{u}^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{\lambda_i}\,\mathbf{u}_i, \tag{14}$$

en donde $f_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_i\rangle$ es la i–ésima coordenada de $\mathbf{f}$ en la base ortonormal.

2. Sistema dinámico de masas y resortes

Se ha mostrado que en un sistema de masas y resortes (con extremos fijos) los desplazamientos de equilibrio $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*)^T$ satisfacen

$$A\mathbf{u}^* = \mathbf{f}, \tag{15}$$

con $\mathbf{f}$ y A definidos por (7) y (8), respectivamente.

Si se introduce una perturbación en el sistema, las masas y los resortes buscarán volver al equilibrio. Por ejemplo, si inicialmente se desplazan las masas la cantidad $\mathbf{u}^0 = (u_1^0, u_2^0 \ldots, u_n^0)^T$, y después se sueltan con velocidad inicial nula, el sistema comenzará a oscilar alrededor de las posiciones de equilibrio. El propósito ahora es modelar este movimiento.

2.1. El modelo dinámico

Para derivar un modelo que describa el desplazamiento de las masas se hace uso de la segunda ley de Newton.

- Sea $u_i(t)$ el desplazamiento de la masa m_i en el instante $t > 0$.
- Las fuerzas que actúan sobre la masa m_i son:
    - La fuerza de gravedad $f_i = m_i\,g$.
    - La fuerza de los resortes adyacentes: $\sigma_i - \sigma_{i+1}$
- La fuerza total actuando sobre las masa m_i es $f_i - (\sigma_i - \sigma_{i+1}) = f_i - (A\mathbf{u})_i$
- La segunda de ley de Newton establece: $m_i\,\ddot{u}_i(t) = f_i - (A\,\mathbf{u})_i$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.
- El modelo se complementa con las condiciones iniciales $u_i(0) = u_i^0$ (desplazamiento inicial) y $\dot{u}_i(0) = 0$ (velocidad inicial).

Un punto encima de la variable u indica primera derivada respecto del tiempo; similarmente dos puntos indicará segunda derivada. Utilizando notación vectorial, se obtiene un modelo dinámico para describir el desplazamiento de las masas. Este modelo está dado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden.

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + A\,\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}, \qquad \text{(ecuación diferencial)} \tag{16}$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0, \quad \text{(desplazamiento inicial)} \tag{17}$$

$$\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}, \qquad \text{(velocidad inicial)} \tag{18}$$

en donde M es la matriz diagonal con las masas. Este sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden tiene solución única y consta de dos componentes naturales

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^* + \mathbf{v}(t), \tag{19}$$

en donde $\mathbf{u}^*$ es la solución de equilibrio, y la función $\mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}^*$ que representa la *desviación del equilibrio*, la cual resuelve el sistema lineal de segundo orden

$$M\ddot{\mathbf{v}}(t) + A\,\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}, \qquad \text{(ecuación diferencial)} \tag{20}$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^0, \quad \text{(desviación inicial)} \tag{21}$$

$$\dot{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{0}, \qquad \text{(velocidad inicial),} \tag{22}$$

en donde la desviación inicial está dada por $\mathbf{v}^0 = \mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*$. Este sistema de ecuaciones se obtiene sustituyendo (19) en (16)–(18), y después utilizando (15) para simplificar el sistema resultante.

Nota Un buen texto para consultar sobre la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y algunos métodos de solución con aplicaciones, es el libro de Martin Braun [5].

2.2. Solución de un caso especial

Se considera el caso en que las masas son todas iguales a un valor m. En este caso, el problema de valores iniciales (20)–(22) se reduce a

$$m\,\ddot{\mathbf{v}}(t) + A\,\mathbf{v}(t) = \mathbf{0}, \tag{23}$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}^0, \tag{24}$$

$$\dot{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{0}, \tag{25}$$

Para resolver este problema se hace uso de las coordenadas naturales del problema. En cada instante $t > 0$ la solución de (23)–(25) pertenece a $\mathbb{R}^n$, por lo que puede expresarse como combinación lineal de los vectores base (vectores propios ortonormales asociados a la matriz A). Es decir,

$$\mathbf{v}(t) = a_1(t)\,\mathbf{u}_1 + a_2(t)\,\mathbf{u}_2 + \cdots + a_n(t)\,\mathbf{u}_n, \tag{26}$$

en donde los coeficientes $a_i(t)$ con $1 \le i \le n$ se deben determinar. Para calcular estos coeficientes se sustituye (26) en (23)–(25), recordando que $A\,\mathbf{u}_i = \lambda_i\,\mathbf{u}_i$. Después de simplificar, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[m\,\ddot{a}_i(t) + \lambda_i\,a_i(t)\right]\ \mathbf{u}_i = \mathbf{0},$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(0)\,\mathbf{u}_i = \mathbf{v}^0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{a}_i(0)\,\mathbf{u}_i = \mathbf{0}.$$

Utilizando la ortonormalidad de los vectores base $\mathbf{u}_i$, se obtienen las ecuaciones diferenciales escalares

$$m\,\ddot{a}_i(t) + \lambda_i\,a_i(t) = 0, \tag{27}$$

$$a_i(0) = v_i^0, \quad \text{en donde } v_i^0 = \langle \mathbf{v}^0, \mathbf{u}_i \rangle, \tag{28}$$

$$\dot{a}_i(0) = 0, \tag{29}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$. Las soluciones de estas ecuaciones diferenciales escalares son:

$$a_i(t) = v_i^0\,\cos\omega_i t, \quad \text{con} \quad \omega_i^2 = \frac{\lambda_i}{m}. \tag{30}$$

Sustituyendo estos valores en (26), se obtiene la solución del problema de valores iniciales (23)–(25)

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i^0 \cos\omega_i t\ \mathbf{u}_i, \tag{31}$$

en donde v_i^0, dada por (28), es la i–ésima coordenada (o coeficiente de Fourier) de la desviación inicial $\mathbf{v}^0$ en las coordenadas naturales (vectores propios de A).

Finalmente, para calcular la solución del problema (16)–(18) (cuando todas las masas tienen el mismo valor m) se suma coordenada a coordenada la solución de equilibrio (14) con la solución que proporciona la desviación de los desplazamientos (31), obteniendo

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{f_i}{\lambda_i} + v_i^0\,\cos\omega_i\,t\right]\mathbf{u}_i, \quad \text{con} \quad f_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_i \rangle, \quad v_i^0 = \langle \mathbf{v}^0, \mathbf{u}_i \rangle, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{m}}. \tag{32}$$

La primera parte de la suma corresponde al equilibrio y la segunda a las desviaciones del equilibrio. Las desviaciones del equilibrio siguen una dinámica oscilatoria producto de la superposición de n **modos normales** $v_i^0\,\cos\omega_i\,t\ \mathbf{u}_i$, con las siguiente características:

- Sus amplitudes v_i^0 dependen de los **vectores propios** $\mathbf{u}_i$, pues son las proyecciones de $\mathbf{v}^0$ sobre $\mathbf{u}_i$.
- Sus frecuencias ω_i dependen de los **valores propios** λ_i escalados por el invero de la masa m.

Ejemplo. Considérese un sistema con dos masas de magnitud $m_1 = m_2 = 1$ y tres resortes con constantes de rigidez $k_1 = k_2 = k_3 = 1$. De acuerdo a (6), la matriz A asociada a este sistema es

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico es $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$. Los valores propios y sus correspondientes vectores propios normalizados son:

$$\lambda_1 = 1, \quad \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = 3, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La fuerza externa debida a la gravedad es

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} m_1\,g \\ m_2\,g \end{bmatrix} = g\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

y su proyección sobre las coordenadas naturales proporciona $f_1 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_1 \rangle = \sqrt{2}\, g$ y $f_2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$. Por lo tanto, la solución de equilibrio es

$$\mathbf{u}^* = \frac{f_1}{\lambda_1}\,\mathbf{u}_1 + \frac{f_2}{\lambda_2}\,\mathbf{u}_2 = g \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Suponiendo que se introduce una perturbación en el sistema dada por la desviación del equilibrio $\mathbf{v}^0 = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix}$, se obtienen dos modos naturales:

$$\mathbf{v}_1(t) = v_1^0 \cos\omega_1 t\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{con frecuencia} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1}{m_1}} = 1,$$

$$\mathbf{v}_2(t) = v_2^0 \cos\omega_2 t\ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{con frecuencia} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2}{m_2}} = \sqrt{3},$$

en donde

$$v_1^0 = \langle \mathbf{v}^0, \mathbf{u}_1 \rangle = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{\sqrt{2}}, \quad v_2^0 = \langle \mathbf{v}^0, \mathbf{u}_2 \rangle = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\sqrt{2}}.$$

Por lo tanto, la dinámica de las oscilaciones está dada por la solución:

$$\mathbf{u}(t) = g \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2} \cos\sqrt{3}t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2.3. Problemas estáticos contra problemas dinámicos

Se ha encontrado que la solución de un problema estático y un problema dinámico se abordan en forma diferente, desde el punto de vista del álgebra lineal. A continuación se realiza una tabla comparativa.

PROBLEMA ESTÁTICO	PROBLEMA DINÁMICO
Resortes y masas en equilibrio	Resortes y masas oscilando
$A\,\mathbf{u} = \mathbf{f}$	$M\,\ddot{\mathbf{u}}(t) + A\,\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}$
Sol. de un sistema de ecuaciones	Sol. de un p. de valores propios

Para resolver el problema estático es necesario resolver un sistema de ecuaciones lineales algebraicas, mientras que para resolver el problema dinámico es necesario resolver un problema de valores propios. Los dos problemas son fundamentalmente diferentes. Desde el punto de vista del álgebra lineal, y también desde el punto de vista computacional, es considerablemente más difícil resolver un problema de valores propios $A\,\mathbf{v} = \lambda\,\mathbf{v}$ que un sistema de ecuaciones lineales $A\,\mathbf{u} = \mathbf{f}$. Por lo tanto, en general es más difícil resolver un problema dinámico que un problema estático.

3. El salto al continuo: la barra elástica

Se estudiará el caso de una barra delgada hecha de material elástico homogéneo. Esta barra se puede pensar como una goma que se deforma cuando se estira. Se supone que la barra cuelga en forma vertical y esta sujeta de ambos extremos en una posición fija, como se ilustra en la Figura 3. Esta barra se puede pensar como un caso límite de una infinidad de masas puntuales unidas por resortes infinitesimales. La barra se deforma por la presencia de la gravedad y el interés es conocer la magnitud de esta deformación. Primero se construirá un modelo matemático y después se resolverá, siguiendo algunas ideas del sistema discreto de masas y resortes

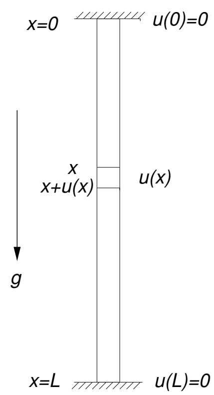

Figura 2: Barra elástica bajo la acción de la gravedad

3.1. El modelo matemático de la barra elástica

Para obtener un modelo que describa la deformación de una barra elástica bajo la acción de la gravedad (o por la presencia de alguna otra carga), se parte de un principio básico: *la magnitud de la deformación en cada porción (elemento) de la barra dependerá del desplazamiento de la barra en dicha porción por unidad de longitud*. Más específicamente,

- Sea $u(x)$ la magnitud del '*desplazamiento*' de la barra en la posición $x \in (0, L)$. Esta magnitud indica cuanto se desplaza un punto $x \in (0, L)$ en la barra cuando ésta se somete a la acción de la gravedad. Por supuesto que este desplazamiento depende de las propiedades físicas de la barra y de la fuerza externa aplicada ('*carga*').

- La deformación de la barra (elongación) en el punto x se medirá mediante la variación del desplazamiento por unidad de longitud en dicho punto, es decir

$$e(x) = \frac{du(x)}{dx}. \tag{33}$$

  Así que a mayor variación del desplazamiento, mayor será la elongación de la barra.

- Hay dos fuerzas actuando sobre cada porción infinitesimal Δx de la barra ubicada en una posición x:

  1. La fuerza interna de deformación ó tracción, $\sigma(x)$, dada por la Ley de Hooke

  $$\sigma(x) = k(x)\, e(x). \tag{34}$$

     Esta tracción se debe a que la barra internamente trata de regresar a su estado original cuando es deformada. Si la deformación no es muy grande y la barra recobra su forma original al suprimirla, entonces la ley de Hooke describe adecuadamente la relación entre la elongación de la barra y la fuerza aplicada. La función $k(x)$ se denomina el módulo de elasticidad y describe las propiedades elásticas de la barra, de manera análoga a la constante de elasticidad en los resortes. Luego, la ley de Hooke establece que la tracción sobre la barra en la posición x es proporcional a la elongación $e(x)$, siendo $k(x)$ el factor de proporcionalidad.

  2. La fuerza externa por unidad de longitud $f(x)$, debido a la acción de la gravedad. Esta fuerza externa viene dada por

  $$f(x) = \rho(x)\, g, \tag{35}$$

     en donde $\rho(x)$ es la densidad (masa por unidad de longitud) en x, y g es la aceleración de la gravedad.

Cuando la barra cuelga en equilibrio, las dos fuerzas (la interior y la exterior) tienen la misma magnitud, y sentido opuesto. Por lo tanto, la ecuación de equilibrio se puede obtener para cada pequeño elemento de la barra $[x, x + \Delta x]$ por medio de la siguiente igualdad

$$\sigma(x + \Delta x) - \sigma(x) + f(x)\,\Delta x = 0. \tag{36}$$

Dividiendo sobre Δx y tomando el límite, cuando $\Delta x \to 0$, se obtiene $-\dfrac{d\sigma(x)}{dx} = f(x)$, la cuál puede expresarse de la siguiente manera (después de utilizar (33) y (34)):

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\,\frac{du(x)}{dx}\right) = f(x), \quad 0 < x < L. \tag{37}$$

Esta ecuación se complementa con las condiciones de frontera

$$u(0) = u(L) = 0, \tag{38}$$

ya que el desplazamiento es nulo en los extremos de la barra, debido a que la barra está sujeta en posición fija en esos puntos.

3.2. Conservación del trabajo

La ecuación de equilibrio (37) establece que *los esfuerzos internos de la barra para oponerse a la deformación* (lado izquierdo), *equilibran la fuerza externa por unidad de longitud debido a acción de la gravedad* (lado derecho). El objetivo aquí es calcular el trabajo que cada una de estas fuerzas realiza sobre la barra. Se puede seguir un razonamiento análogo al caso de los resortes para facilitar el cálculo de estas cantidades.

- El trabajo interno de los resortes se calculó como $\sum_{i=0}^{n} \sigma_i\, e_i = \langle \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{e} \rangle$. Si se aplica el mismo razonamiento a la barra elástica, en lugar de la fuerza de restitución σ_i tenemos la tracción $\sigma(x)$, y en lugar de las elongaciones e_i tenemos las deformaciones por unidad de longitud $e(x)$. Naturalmente, en lugar de sumar productos de cantidades discretas ahora debemos integrar productos de cantidades continuas. Por lo tanto

$$\text{Trabajo interno sobre la barra} = \int_0^L \sigma(x)\, e(x)\, dx. \tag{39}$$

- El trabajo externo sobre las masas se cálculo como $\sum_{i=0}^{n} f_i\, u_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle$. Para la barra elástica, en lugar de las fuerzas de gravedad f_i tenemos la fuerza de gravedad por unidad de longitud $f(x)$, y en lugar de los desplazamientos discretos u_i tenemos los desplazamientos continuos $u(x)$. Por lo tanto

$$\text{Trabajo externo sobre la barra} = \int_0^L f(x)\, u(x)\, dx \tag{40}$$

A continuación se verificará que el trabajo interno es igual al trabajo externo, siguiendo un procedimiento análogo al del caso discreto (9). Primero, se sustituye (33) y (34) en (39), obteniendo

$$\int_0^L \sigma(x)\, e(x)\, dx = \int_0^L \left(k(x)\frac{du(x)}{dx}\right) \frac{du(x)}{dx}\, dx.$$

Haciendo integración por partes en la integral de la derecha se obtiene

$$\int_0^L \sigma(x)\, e(x)\, dx = -\int_0^L \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du(x)}{dx}\right) u(x)\, dx.$$

Los términos de frontera en la integración por partes, $k(L)\frac{du(L)}{dx}u(L) - k(0)\frac{du(0)}{dx}u(0)$, se anulan debido a las condiciones de frontera (38). A su vez la integral de la derecha en la última expresión se puede transformar utilizando (37). Por lo tanto

$$\int_0^L \sigma(x)\, e(x)\, dx = \int_0^L f(x)\, u(x)\, dx. \tag{41}$$

la cual es el análogo continuo de la expresión (9) en el caso discreto. Se concluye que *el trabajo total realizado por la barra para contrarrestar la deformación es igual al trabajo total externo realizado por la gravedad sobre la barra*

3.3. El producto escalar para funciones

Las analogías entre el problema de equilibrio de la barra elástica y el problema estático de masas y resortes se han basado en conceptos físicos como fuerza, trabajo y equilibrio. Tratando de encontrar analogías de tipo matemático, se observa que el trabajo externo sobre n masas se puede calcular mediante el producto escalar en $\mathbb{R}^n$ como $\langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{i=1}^n f_i\, u_i$, por lo que es natural preguntar si el cálculo del trabajo en el caso continuo, dado por

$$\langle f, u \rangle := \int_0^L f(x)\, u(x)\, dx, \tag{42}$$

también define un producto escalar. Considerando por el momento el espacio de las funciones continuas $\mathcal{C}(0, L)$, la expresión anterior efectivamente define un producto escalar, pues se satisfacen las siguientes propiedades

- Bilinealidad: $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$, es decir
$$\int_0^L \left[u(x) + v(x)\right]\, w(x)\, dx = \int_0^L u(x)\, w(x)\, dx + \int_0^L v(x)\, w(x)\, dx.$$
Análogamente se satisface $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$.

- Simetría: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$, pues obviamente
$$\int_0^L u(v)\, v(x)\, dx = \int_0^L v(v)\, u(x)\, dx$$

- Positividad: $\langle u, u \rangle > 0$ si $u(x)$ no es la función nula sobre el intervalo $(0, L)$, y $\langle u, u \rangle = 0$ sólo si $u(x) = 0$ para toda $x \in (0, L)$.

Este producto escalar sigue siendo válido sobre un conjunto de funciones más amplio que el de las funciones continuas. Por ejemplo, también se puede calcular para funciones con un conjunto finito de discontinuidades de salto. El conjunto incluye a todas las funciones definidas sobre el intervalo $(0, L)$ que son '*cuadrado integrables*' (en el sentido de Lebesgue). Este espacio vectorial se denota por $L^2(0, L)$ y está definido por

$$L^2(0, L) = \left\{ v : (0, L) \to \mathbb{R} \, : \, \int_0^L u^2\, dx < \infty \right\}. \tag{43}$$

Este espacio vectorial es más adecuado que el conjunto de las funciones continuas debido a que es un espacio normado completo [6], con la norma asociada a este producto interior: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Un espacio normado completo con producto interior se denomina espacio de Hilbert, por lo que $L^2(0, L)$ es un espacio de Hilbert. La famosa desigualdad de Cauchy–Schwartz, $\langle u, v \rangle \leq \|u\|\, \|v\|$, en este caso toma la forma

$$\int_0^L u(x)\, v(x)\, dx \leq \left(\int_0^L u(x)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^L v(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

3.4. La transpuesta e integración por partes

Un concepto importante en el álgebra matricial es la transpuesta de una matriz, la cual desde el punto de vista operacional se puede definir por medio del producto escalar. Es decir, si A es una matriz de $m \times n$ con coeficientes reales, esta define una transformación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, definida por $\mathbf{x} \to A\,\mathbf{x}$. Entonces, la matriz transpuesta A^T define una transformación de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$ definida por $\mathbf{y} \to A^T\mathbf{y}$ y que satisface:

$$\langle A\,\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathbb{R}^m} = \langle \mathbf{x}, A^T\mathbf{y}\rangle_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,\, \forall\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \tag{44}$$

en donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^m}$ denotan al producto escalar en $\mathbb{R}^n$ y R^m, respectivamente. Por supuesto que desde el punto de vista práctico la matriz transpuesta de A se calcula mediante la transposición de columnas por filas o viceversa, lo cual implica en términos de sus coeficiente que $(A^T)_{ij} = A_{ji}$. Algunas propiedades importantes son:

$$(A^T)^T = A, \qquad (A+B)^T = A^T + B^T, \qquad (AB)^T = B^T A^T.$$

Es posible calcular el producto escalar de dos vectores $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle_{\mathbb{R}^n}$ como el producto matricial $\mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2^T\mathbf{x}_1$. Utilizando esta propiedad y las propiedades de la transpuesta, se puede verificar (44):

$$\langle A\,\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathbb{R}^m} = (A\,\mathbf{x})^T\mathbf{y} = (\mathbf{x}^T A^T)\mathbf{y} = \mathbf{x}^T(A^T\mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, A^T\mathbf{y}\rangle_{\mathbb{R}^n}$$

Para encontrar más analogías de corte matemático entre el caso discreto y el caso continuo, conviene comparar algunos resultados entre ambos casos, como se muestra en el Cuadro 1.

CASO DISCRETO	CASO CONTINUO
Sistema masas–resortes	Barra elástica
Deplazamientos de las masas: $\mathbf{u}$	Desplazamiento de la barra: $u(x)$
Elongación: $\mathbf{e} = D\,\mathbf{x}$	Deformación: $e(x) = \dfrac{du(x)}{dx}$
Fuerza de restitución: $\boldsymbol{\sigma} = K\,\mathbf{e}$	Tracción: $\sigma(x) = k(x)\,e(x)$
Equilibrio: $D^T\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}$	Equilibrio: $-\dfrac{d\sigma(x)}{dx} = f(x)$
Ecuación matricial: $D^T K\,D\,\mathbf{u} = \mathbf{f}$	Ec. diferencial: $-\dfrac{d}{dx}\left(k(x)\dfrac{du(x)}{dx}\right) = f(x)$

Cuadro 1: Comparación entre el caso discreto y el caso continuo

Se observa que para el caso discreto la matriz de incidencia D actúa sobre el vector de desplazamientos $\mathbf{u}$, mientras que para el caso continuo el operador diferencial $\dfrac{d}{dx}$ actúa sobre las funciones $u(x)$. Asimismo, en las ecuaciones de equilibrio se observa que la matriz transpuesta D^T actúa sobre los vectores $\boldsymbol{\sigma}$, mientras que el operador diferencial $-\dfrac{d}{dx}$ actúa sobre las tracciones $\sigma(x)$. Esto nos indica que podemos hacer la identificación

$$D \sim \frac{d}{dx}, \qquad D^T \sim -\frac{d}{dx}. \tag{45}$$

Esta identificación no es casual, y es posible observar que el operador diferencial $\dfrac{d}{dx}$ puede pensarse como el límite de la matriz de incidencia cuando $n \to \infty$, ya que

$$\frac{du(x_i)}{dx} = \lim_{h_i \to 0} \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h_i}, \quad \text{mientras que} \quad (D\mathbf{u})_i = u_i - u_{i-1}.$$

Es decir, el operador diferencial es el límite continuo de la matriz D escalada, en donde los factores de escalamiento son las longitudes h_i. Estas longitudes se pueden pensar como la separación de las masas m_i y m_{i-1}, en el caso discreto.

Con el objeto de completar la identificación debemos verificar que la '*transpuesta*' del operador diferencial es el mismo operador pero con signo contrario. Para facilitar el procedimiento denotamos el operador diferencial por $\mathcal{D} = \dfrac{d}{dx}$ y utilizamos integración por partes:

$$\langle \mathcal{D}u, v\rangle = \left\langle \frac{du}{dx}, v \right\rangle = \int_0^L \frac{du}{dx}\, v\, dx = -\int_0^L u\, \frac{dv}{dx}\, dx = \left\langle\ u, -\frac{dv}{dx} \right\rangle = \langle u, \mathcal{D}^T v\rangle. \tag{46}$$

Los términos de frontera en la integración por partes son cero ya que $u(0) = u(L) = 0$. En realidad los operadores diferenciales definidos sobre conjuntos de funciones que están definidas sobre regiones acotadas, vienen acompañado de condiciones de frontera. Así que la definición más completa de los operadores $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}^T$ es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} &\quad \text{se define por medio de} \quad \mathcal{D}u = \frac{du}{dx}, \quad u(0) = 0,\\
\mathcal{D}^T &\quad \text{se define por medio de} \quad \mathcal{D}^T u = -\frac{du}{dx}, \quad u(L) = 0.
\end{aligned}$$

Los anteriores operadores diferenciales son claramente lineales, además de que están bien definidos sobre el conjunto de funciones cuadrado integrables, con derivadas también cuadrado integrables, sobre el intervalo $(0, L)$. A este conjunto se le denota por $H^1(0, L)$. Si además se pide que las funciones se anulen en los extremos del intervalo, entonces se obtiene un subespacio vectorial que se denota por $H_0^1(0, L)$

La formalización matemática de los anteriores conceptos tomó mucho tiempo de investigación en los dos siglos anteriores, dando origen a un área de las matemáticas, el ***análisis funcional***. No es el objeto de este trabajo abordar de manera minuciosa estos aspectos formales, sino sólo motivar por medio de ejemplos sencillos cómo el'*universo discreto*', que se puede describir utilizando los espacios finito–dimensionales $\mathbb{R}^n$, en el límite da origen a conceptos análogos en espacios de funciones infinito–dimensionales que se utilizan para modelar fenómenos en el '*universo continuo*'. Para un estudio más exhaustivo del análisis funcional recomendamos las referencias [6], [7] , [8], [9].

Dicho lo anterior, vale la pena aclarar que, desde el punto de vista matemático, el 'universo continuo' es mucho más complejo que el 'universo discreto'. Sólo por mencionar un ejemplo: *Cualquier operador ó transformación entre los espacios vectoriales de dimensión finita $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ se puede identificar con una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Es decir, cualquier operador entre espacios de dimensión finita es una transformación matricial. En el 'universo continuo' no todo operador lineal (transformación lineal) $\mathcal{A}$ entre dos espacios vectoriales infinito–dimensionales V, W es un operador diferencial. Por ejemplo, en espacios vectoriales de funciones también se pueden definir operadores integrales. Además, no todo operador en espacios infinito–dimensionales se puede ver como el límite de un operador definido en espacios finito-dimensionales.*

Por último, se introduce una definición y una aclaración:

- Dados dos espacios de Hilbert U y V y un operador $\mathcal{A} : U \to V$, si existe un operador $\mathcal{B} : V \to U$ tal que $\langle \mathcal{A}u, v\rangle_V = \langle u, \mathcal{B}v\rangle_U$, para todo $u \in U$ y $v \in V$, al operadror $\mathcal{B}$ se le denomina el ***operador adjunto*** de $\mathcal{A}$ y se denota por $\mathcal{A}^*$.

- Por lo tanto, en lugar de escribir $\mathcal{D}^T$, escribiremos $\mathcal{D}^*$ de ahora en adelante, pues el concepto de '*transpuesta*' es más específicamente utilizado en transformaciones matriciales.

3.5. Energía del sistema y principio del mínimo

En el caso de la barra elástica también se satisface un principio del mínimo. Es decir, *El desplazamiento de equilibrio es aquel en el que la energía total del sistema es mínima.*

El despazamiento de equilibrio $u^*(x)$ satisface el sistema (37)–(38). Por otro lado, la energía potencial almacenada en la barra debido a un desplazamiento arbitrario $u(x)$ se debe a dos factores:

- La tracción debida a las fuerzas elásticas internas. Está parte de la energía potencial se calcula utilizando la expresión análoga al caso discreto (11):

$$\frac{1}{2}\int_0^L k(x)\, e(x)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^L k(x) \left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 dx.$$

  Tiene signo positivo debido a que la barra elastica cede trabajo cuando se relaja la fuerza que la deforma, es decir la barra regresa autómaticamente a su estado original.

- La fuerza externa debida a la gravedad. Utilizando también la expresión análoga en el caso discreto (10) obtenemos:

$$-\int_0^l \rho(x)\; g\; u(x)\, dx = -\int_0^L f(x)\, u(x)\, dx$$

  Tiene signo opuesto debido a que para regresar la barra elástica a su estado original se debe hacer trabajo contra la gravedad.

Por la tanto, la **energía potencial total** está dada por la expresión:

$$P(u) = \frac{1}{2}\int_0^L k(x) \left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2 dx - \int_0^L f(x)\, u(x)\, dx \tag{47}$$

Haciendo integración por partes en la primera integral obtenemos

$$P(u) = \frac{1}{2}\int_0^L -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du(x)}{dx}\right) u(x)\, dx - \int_0^L f(x)\, u(x)\, dx. \tag{48}$$

Con el objeto de mostrar que esta expresión es análoga a la expresión (12), definimos el operador $\mathcal{K}$ como $(\mathcal{K}u)(x) = k(x)\, u(x)$, en donde consideramos $k(x) \in \mathcal{C}(0, L)$ y no negativa por el momento. Utilizando los operadores diferenciales definidos definidos previamente, $\mathcal{D} = d/dx$ y $\mathcal{D}^* = -d/dx$, se puede construir el operador diferencial lineal

$$\mathcal{A} = \mathcal{D}^*\mathcal{K}\mathcal{D}, \text{ definido por } (\mathcal{A}u)(x) = -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du(x)}{dx}\right). \tag{49}$$

Por lo tanto, utilizando el producto escalar, la energía potencial puede expresarse en forma operacional por medio del *funcional cuadrático*:

$$P(u) = \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}u, u\rangle - \langle f, u\rangle. \tag{50}$$

Esta expresión es análoga a la energía potencial del sistema discreto, dada por la *función cuadrática* (12). Las analogías más importantes entre la matriz $A = D^T K\, D$ en (12) y el operador $\mathcal{A} = \mathcal{D}^*\mathcal{K}\mathcal{D}$ en (50) son:

- La matriz A es simétrica, es decir $A^T = A$, pues $A^T = (D^T K\, D)^T = D^T K^T\, (D^T)^T = D^T K\, D$, debido a que K es simétrica. Por lo tanto

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, A\,\mathbf{v}\rangle \quad \text{para todo } \mathbf{u},\, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n.$$

Para verificar que el operador $\mathcal{A}$ es simétrico ($\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$) se utiliza integración por partes dos veces:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}\, u, v\rangle &= \int_0^L -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du(x)}{dx}\right) v(x)\, dx = \int_0^L \left(k(x)\frac{du(x)}{dx}\right)\frac{dv(x)}{dx}\, dx \\ &= -\int_0^L u(x)\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{dv(x)}{dx}\right) dx = \langle u, \mathcal{A}\, v\rangle \quad \text{para toda } u,\ v \in H_0^1(0,L).\end{aligned}$$

- La matriz A es definida positiva, es decir $\langle A\,\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle > 0$ para todo vector $\mathbf{u}$ no cero en $\mathbb{R}^n$, y es cero sólo si $\mathbf{u} = 0$.

  Para verifica que el operador $\mathcal{A}$ es positivo, se utiliza integración por partes una vez:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}\, u, u\rangle &= \int_0^L -\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du(x)}{dx}\right) u(x)\, dx = \int_0^L \left(k(x)\frac{du(x)}{dx}\right)\frac{du(x)}{dx} \\ &= \int_0^L k(x)\left(\frac{du(x)}{dx}\right)^2.\end{aligned}$$

  Debido a que $k(x)$ es una función positiva, entonces la expresión anterior es positiva si u es diferente de la función cero, y es igual a cero sólo si la función u es la función cero.

La propiedad de positividad del operador diferencial $\mathcal{A}$ permite afirmar que el funcional cuadrático (50) tiene un único mínimo. Para demostrarlo, utilizaremos técnicas del cálculo de variaciones [10], [11].

Definición. Dado el funcional $P : H_0^1(0,L) \to \mathbb{R}$, su *primera y segunda variaciónes* en u en la *dirección* v se define por medio de

$$D^{(1)}P(u;v) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{P(u+\epsilon\, v) - P(u)}{\epsilon} = \left.\frac{dP(u+\epsilon\, v)}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}, \qquad D^{(2)}P(u;v) = \left.\frac{d^2P(u+\epsilon\, v)}{d\epsilon^2}\right|_{\epsilon=0},$$

respectivamente. Para calcular estas expresiones se utiliza la linealidad y simetría de $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned}P(u+\epsilon\, v) &= \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}(u+\epsilon\, v), u+\epsilon\, v\rangle - \langle f, u+\epsilon\, v\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}u, u\rangle - \langle f, u\rangle + \epsilon\,\{\langle \mathcal{A}u, v\rangle - \langle f, v\rangle\} + \frac{\epsilon^2}{2}\langle \mathcal{A}v, v\rangle \\ &= P(u) + \epsilon\,\{\langle \mathcal{A}u, v\rangle - \langle f, v\rangle\} + \frac{\epsilon^2}{2}\langle \mathcal{A}v, v\rangle.\end{aligned}$$

Obsérvese que esta expresión se puede considerar como la expansión de Taylor de P alrededor de u. Aplicando las definiciones de la primera y segunda variación, se obtiene

$$D^{(1)}P(u;v) = \langle \mathcal{A}u, v\rangle - \langle f, v\rangle, \qquad D^{(2)}P(u;v) = \langle \mathcal{A}v, v\rangle, \quad \forall\ v \in H_0^1(0,L) \tag{51}$$

Debido a que el operador $\mathcal{A}$ es positivo, entonces $\langle \mathcal{A}v, v\rangle > 0$, para toda función v no nula. Por lo tanto, el único mínimo de $P(u)$ se obtiene en aquella función u para la cual su primera variación es cero para toda v, es decir la que resuelve la ecuación variacional

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle = \langle f, v\rangle, \quad \text{para toda} \quad v \in H_0^1(0,L). \tag{52}$$

La solución de esta ecuación variacional es aquella u que hace que $\mathcal{A}\,u - f$ sea ortogonal a $H_0^1(0,L)$ bajo el producto interior. Debido a que el espacio $H_0^1[0.L]$ es completo, el único elemento ortogonal a él es la función cero. Por lo tanto, $\mathcal{A}u = f$, es decir u resuelve el problema de equilibrio (37)–(38).

Por lo tanto, de acuerdo a lo anterior, para poder encontrar el desplazamiento de equilibrio en la barra elástica se puede proceder en cualquiera de las dos formas siguientes:

1. Resolver el modelo de equilibrio dado por la ecuación diferencial (37)–(38).

2. Minimizar el funcional de energía potencial, dado por (47) o (50).

Los métodos para resolver estos problemas son un poco más elaborados que los correspondientes al caso discreto, debido a que hay que buscar las soluciones en espacios vectoriales de dimensión infinita. Para resolver la ecuación diferencial se pueden utilizar los métodos de Fourier, basados en expansiones por medio de bases con funciones ortogonales, mientras que para minimizar el funcional es posible utilizar métodos iterativos de descenso. En la siguiente subsección utilizaremos los métodos de expansión en series de Fourier.

Se terminará esta sección mostrando un resumen de las analogías entre el problema discreto de masas–resorte y el problema continuo de la barra elástica. El Cuadro 2, complementa el Cuadro 1, y ahí se ha utilizado el subíndice correspondiente para el producto escalar en $\mathbb{R}^n$ y $L^2(0,L)$, con el objeto de hacer énfasis en las analogías. Sin embargo, estos subíndices no se utilizarán en lo sucesivo, debido a que el tipo de producto escalar será claro en el contexto en que se utilice.

	CASO DISCRETO	CASO CONTINUO
	Sistema masas–resortes	Barra elástica
Ec. de equil.	$A\,\mathbf{u} = \mathbf{f}$, con $A = D^T K\, D$ $u_0 = u_{n+1} = 0$	$\mathcal{A}\,u = f$, con $\mathcal{A} = -\dfrac{d}{dx}\left(k\dfrac{d}{dx}\right)$ $u(0) = u(L) = 0$
Operador	Matricial $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$	Diferencial $\mathcal{A} : H_0^1(0,L) \to L^2(0,L)$
Prod. escalar	$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \sum_{i=1}^n u_i\, v_i$	$\langle u, v \rangle_{L^2(0,L)} = \displaystyle\int_0^L u(x)\, v(x)\, dx$
Simétria	$A = A^T$, pues $\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle \mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle$:	$\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, pues $\langle \mathcal{A}u, v \rangle_{L^2(0,L)} = \langle u, \mathcal{A}v \rangle_{L^2(0,L)}$
Positividad	$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} > 0$ si $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$	$\langle \mathcal{A}u, u \rangle_{L^2(0,L)} > 0$ si u(x) es no nula
Potencial	$p(\mathbf{u}) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^n k_i\, e_i^2 - \sum_{i=0}^n f_i\, u_i$ $= \frac{1}{2}\langle A\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n} - \langle \mathbf{f}, \mathbf{u} \rangle_{\mathbb{R}^n}$ en donde $\mathbf{e} = D\mathbf{u}$	$P(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^L k(x) e(x)^2 dx - \int_0^L f(x) u(x) dx$ $= \frac{1}{2}\langle \mathcal{A}u, u \rangle_{L^2(0,L)} - \langle f, u \rangle_{L^2(0,L)}$ en donde $e = \dfrac{du}{dx}$
Derivada	$\boldsymbol{\nabla} p(\mathbf{u}) = A\,\mathbf{u} - \mathbf{f}$	$D^{(1)}P(u; v) = \langle \mathcal{A}u - f, v \rangle_{L^2(0,L)}\ \forall\ v \in H_0^1(0,L)$
Cond. para el mínimo	$A\,\mathbf{u}^* = \mathbf{f}$: $D^T K\, D\,\mathbf{u}^* = \mathbf{f}$ $u_0 = u_{n+1} = 0$	$\mathcal{A}u^* = f$: $-\dfrac{d}{dx}\left(k\dfrac{du^*}{dx}\right) = f$, $u(0) = u(L) = 0$

Cuadro 2: Comparación de los modelos discreto y continuo. Continuación

3.6. Solución del problema de equilibrio

Para simplificar se considera el caso especial en que la barra esta hecha de un material con elasticidad uniforme. Por lo tanto, en el modelo se considera un módulo de elasticidad constante, es decir $k(x) = k$ con $k > 0$ en $\mathbb{R}$. Así que el modelo de equilibrio esta dado por el problema de valores a la frontera siguiente

$$-k\,\frac{d^2}{dx^2}u(x) = f(x), \quad 0 < x < L, \tag{53}$$

$$u(0) = u(L) = 0, \tag{54}$$

Esta ecuación diferencial es una ecuación diferencial lineal de segundo orden con valores a la frontera. La forma más común de resolver este tipo de problemas es por medio del método de Fourier [11]. La idea es encontrar los valores propios y las funciones propias del operador diferencial de segundo orden

$$\mathcal{A} = -k\,\frac{d^2}{dx^2}. \tag{55}$$

Una función propia de $\mathcal{A}$ satisface $\mathcal{A}\,u = \lambda\,u$, con valor propio $\lambda \in \mathbb{R}$. No es tarea complicada encontrar las funciones propias, dado que aquellas funciones para las cuales su segunda derivada es igual a un múltiplo negativo de la misma función, son las funciones seno y coseno. Por lo que podemos intentar con la combinación

$$u(x) = a\,\operatorname{sen}\Omega x + b\,\cos\Omega x.$$

Debido a que $u(0) = 0$, entonces $b = 0$, y como $u(L) = 0$ se satisface $a\,\operatorname{sen}\omega L = 0$, es decir $\Omega = \dfrac{m\,\pi}{L}$, con $m \in \mathbb{N}$. Obsérvese que a no puede ser cero, pues en ese caso $u(x) \equiv 0$, obteniendo la solución trivial. Por lo tanto, las funciones propias, que cumplen con las condiciones de frontera, son de la forma

$$u_m(x) = \operatorname{sen}\Omega_m\,x, \quad \text{con frecuencias} \quad \Omega_m = \frac{m\,\pi}{L}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Estas funciones satisfacen

1. $\langle u_m, u_n\rangle = \displaystyle\int_0^L \operatorname{sen}\frac{m\,\pi\,x}{L}\,\operatorname{sen}\frac{n\,\pi\,x}{L}\,dx = 0 \quad \text{si} \quad n \neq m.$
2. $\langle u_m, u_m\rangle = \|u_m\|^2 = \displaystyle\int_0^L \left(\operatorname{sen}\frac{m\,\pi\,x}{L}\right)^2 dx = \frac{L}{2}.$

Por lo tanto, ellas forman un conjunto ortogonal bajo el producto escalar en $L^2(0, L)$. Dividiendo estas funciones entre su norma, se obtienen las funciones propias normalizadas

$$u_m(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\operatorname{sen}\Omega_m\,x = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\operatorname{sen}\frac{m\,\pi}{L}\,x,$$

las cuales se denotarán de la misma manera que las funciones no normalizadas, con el objeto de simplificar la notación.

Por otro lado, los valores propios se obtienen fácilmente de $\mathcal{A}\,u_m = \lambda_m\,u_m$. Es decir

$$-k\,\frac{d^2}{dx^2}\,(\operatorname{sen}\Omega_m x) = -k\,\left(-\sqrt{\frac{2}{L}}\,\Omega_m^2\,\operatorname{sen}\Omega_m x\right) = \lambda_m\,\sqrt{\frac{2}{L}}\,\operatorname{sen}\Omega_m x,$$

de donde se obtiene que $\lambda_m = k\,\Omega_m^2$. En resumen, el operador diferencial $\mathcal{A} = -k\,\dfrac{d^2}{dx^2}$ tiene las funciones propias u_m y valores propios λ_m siguientes:

$$u_m(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\operatorname{sen}\Omega_m\,x, \quad \lambda_m = k\,\Omega_m^2, \quad \text{con} \quad \Omega_m = \frac{m\,\pi}{L}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{56}$$

Las funciones y valores propios del operador diferencial $\mathcal{A}$ nos permiten encontrar la solución de la ecuación diferencial lineal (53)–(54). La razón principal es que el conjunto de funciones propias (56) forma una base ortonormal del espacio $L^2(0, L)$. Más específicamente, si $f(x)$ es una función cuadrado integrable, entonces

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \, u_m(x), \quad \text{con} \quad f_m = \langle f, u_m \rangle = \sqrt{\frac{2}{L}} \int_0^L f(x) \,\mathrm{sen}\, \Omega_m \, x \, dx, \tag{57}$$

en donde los coeficientes $f_m \in \mathbb{R}$ se denominan los coeficientes de Fourier de $f(x)$. Para calcular estos coeficientes se utiliza la ortogonalidad de las funciones propias. Por ejemplo, para encontrar el coeficiente f_n se multiplica escalarmente en ambos lados de la serie anterior por la función propia u_n, obteniendo

$$\langle f, u_n \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \, \langle u_m, u_n \rangle = f_n \langle u_n, u_n \rangle = f_n.$$

Análogamente, si $u^*(x)$ es solución de (53)–(54), ésta pertenece a $H_1^0(0, L) \subset L^2(0, L)$ y se puede escribir como combinación lineal de las funciones base $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$. Es decir,

$$u^*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \, u_m(x), \tag{58}$$

en donde hay que determinar los coeficientes $a_m \in \mathbb{R}$. Para calcular estos coeficientes se sustituyen las series (57) y (58) en la ecuación $\mathcal{A} \, u^* = f$. Recordando que $\mathcal{A} \, u_m = \lambda_m \, u_m$, se obtiene

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \, a_m \, u_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \, u_m(x).$$

Finalmente, utilizando la ortogonalidad de las funciones propias se encuentra que $\lambda_m \, a_m = f_m$ para toda $m \in \mathbb{N}$. Se concluye que la solución de la ecuación diferencial es:

$$u^*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{\lambda_m} \, u_m(x), \tag{59}$$

en donde los valores propios λ_m y funciones propias $u_m(x)$ están dados en (56) y los coeficientes de Fourier f_m están dados por (57). Obsérvese que $u^*(0) = u^*(L) = 0$, debido a que las funciones propias u_m satisfacen estas condiciones de frontera.

Conclusión. El procedimiento utilizado para calcular la solución de equilibrio de la barra elástica (caso continuo) fue completamente análogo al procedimiento utilizado para calcular la solución de equilibrio del sistema de masas y resortes (caso discreto). La clave en ambos casos fue la utilización de las '*coordenadas naturales*' del problema: en el caso discreto los valores y vectores propios de la matriz A, y en el caso continuo los valores propios y funciones propias del operador diferencial $\mathcal{A}$. En ambos casos la ortogonalidad de las bases (vectores propios y funciones propias) es una propiedad central para encontrar las soluciones en forma muy sencilla. En particular, se puede observar la analogía entre las solución (14) del caso discreto y la solución (59) del caso continuo.

4. Problema dinámico para la barra elástica

Ahora consideraremos el problema dinámico de la barra elástica. Este problema consiste en desplazar la barra fuera del equilibrio y soltarla desde el reposo. Al intentar volver a la posición de equilibrio la barra desarrollará un movimiento oscilatorio. Nuestro propósito es describir este movimiento calculando la dinámica de los desplazamientos en cada instante.

4.1. El modelo dinámico de la barra elástica

Los desplazamientos ahora dependerán tanto de la posición como del tiempo, por lo que al balance de fuerzas que se obtuvo en el equilibrio se le agrega la fuerza introducida por la aceleración. De acuerdo a la segunda ley de Newton, dicha fuerza (por unidad de longitud) es $\rho(x)\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, en donde $\rho(x)$ indica la densidad lineal de la barra elástica. Por lo tanto, el modelo que describe la dinámica oscilatoria de la barra se obtiene agregando al sistema (37)–(38) el término con la aceleración, así como las condiciones inciales:

$$\rho(x)\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) = f(x), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t \leq T \quad \text{(Balance de fuerzas)} \tag{60}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \qquad \text{(Condiciones de frontera)} \tag{61}$$

$$u(x,0) = u^0(x), \quad 0 \leq x \leq L, \qquad \text{(Desplazamiento inicial)} \tag{62}$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq L, \qquad \text{(Velocidad inicial)} \tag{63}$$

Suponiendo que se puede calcular el estado del sistema en cada instante $t > 0$, entonces su evolución la podemos modelar en forma operacional de la siguiente manera

$$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{A}u = f, \tag{64}$$

$$u(0) = u^0, \tag{65}$$

$$\frac{\partial u(0)}{\partial t} = 0, \tag{66}$$

en donde se utiliza la notación $u(t) \longrightarrow u(x,t),\ x \in (0,L)$. Por ejemplo, $u(0) = u^0$ se lee como en 62 y similarmente 66 se lee como en 63. Las condiciones de frontera están incluidas implícitamente en el operador diferencial $\mathcal{A} : H_0^1(0,L) \to L^2(0,L)$, definido por

$$(\mathcal{A}u)(x) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial u(x,\cdot)}{\partial x}\right) \quad \text{con} \quad u(0,\cdot) = u(L,\cdot) = 0, \tag{67}$$

en donde el punto indica que la variable del tiempo no interviene en la definición del operador. Obsérvese que el sistema (64)–(66) es el análogo continuo de el sistema discreto (16)–(18).

4.2. Cálculo de la solución del problema dinámico

El problema (64)–(66) se puede simplificar como se simplificó el análogo discreto (16)–(18). Para ello se introducen las desviaciones del equilibrio $v(x,t) = u(x,t) - u^*(x)$ y se sustituyen en (64)–(66). Tomando en cuenta que la solución de equilibrio u^* satisface $\mathcal{A}u^* = f$, se obtiene

$$\rho\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mathcal{A}v = 0, \tag{68}$$

$$v(0) = v^0, \tag{69}$$

$$\frac{\partial v(0)}{\partial t} = 0, \tag{70}$$

en donde la desviación inicial está dada por $v^0 = u^0 - u^*$. Claramente, el problema 68–70 es el análogo continuo del problema discreto (23)–(25). Con el objeto de simplificar, se considera una barra elástica uniforme, es decir tanto la densidad ρ como la elasticidad k de la barra se suponen constantes. Se aplica la misma metodología que se utilizó para resolver el problema discreto:

1. Se utilizan de las funciones propias del operador diferencial $\mathcal{A}$, así como sus valores propios. La solución de la ecuación diferencial debe ser combinación lineal de dichas funciones base en cada instante $t > 0$.

2. Se sustituye la serie de Fourier (combinación lineal) en la ecuación diferencial y en las condiciones iniciales para obtener los coeficientes de Fourier de la serie.

A continuación se detallan estos dos pasos:

Paso 1. Utilización de las funciones propias y valores propios del operador $\mathcal{A} = -k\,\dfrac{d^2}{dx^2}$.

Se hace uso de las funciones propias y valores propios definidos en (56). El estado del sistema en cada instante t se expresa como combinación lineal de las funciones propias, es decir

$$v(x,t) = a_1(t)\,u_1(x) + a_2(t)\,u_2(x) + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_m(t)\,u_m(x), \tag{71}$$

la cual es análoga a (26). El objetivo es calcular los coeficientes $a_m(t)$, y para ello se realiza el siguiente paso.

Paso 2. Sustitución de la serie en la ecuación diferencial.

Sustituyendo la serie de Fourier (71) en (68)–(70) y haciendo uso de que $\mathcal{A}\,u_m = \lambda_m\,u_m$, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\rho\,\ddot{a}_m(t) + \lambda_m\,a_m(t)\right]\,u_m(x) = 0, \quad x \in (0,L), \quad t > 0, \\ \sum_{i=1}^{\infty} a_m(0)\,u_m(x) = v^0, \quad x \in (0,L), \\ \sum_{i=1}^{\infty} \dot{a}_m(0)\,u_m(x) = 0, \quad x \in (0,L). \end{aligned}$$

Haciendo uso de la ortogonalidad de las funciones propias, se obtiene

$$\rho\,\ddot{a}_m(t) + \lambda_m\,a_m(t) = 0, \tag{72}$$

$$a_m(0) = v_m^0 \quad \text{con} \quad v_m^0 = \langle v^0, u_m\rangle, \tag{73}$$

$$\dot{a}_m(0) = 0, \tag{74}$$

para cada $m \in \mathbb{N}$. Estas ecuaciones diferenciales escalares son el análogo continuo de las ecuaciones diferenciales (27)-(29). Las soluciónes son:

$$a_m(t) = v_m^0\,\cos\omega_m t, \quad \text{con} \quad \omega_m^2 = \frac{\lambda_m}{\rho}, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{75}$$

Sustituyendo en (71) se obtiene la solución del problema (68)–(70)

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_m^0\,\cos\omega_m t\;u_m(x), \quad \text{con} \quad v_m^0 = \langle v^0, u_m\rangle, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{\lambda_m}{\rho}}, \tag{76}$$

en donde las funciones propias u_m y los valores propios λ_m están dados por (56). La solución (76) es la análoga a la solución (31) del caso discreto.

Los desplazamientos $u(x,t)$ del problema (64)–(66) se obtienen sumando coordenada a coordenada la solución de equilibrio (59) con las desviaciones de los desplazamientos (76). Se obtiene

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{f_m}{\lambda_m} + v_m^0 \cos \omega_m t \right] u_m(x), \quad \text{con} \quad f_m = \langle f, u_m \rangle, \quad v_m^0 = \langle v^0, u_m \rangle, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{\lambda_m}{\rho}}. \tag{77}$$

Esta solución es análoga a la solución para el sistema discreto de masas y resortes (32). Al igual que en ese caso, la primera parte de la suma corresponde al equilibrio y la segunda a las desviaciones del equilibrio. Las desviaciones del equilibrio siguen una dinámica oscilatoria producto de la superposición de un número infinito de **modos normales** $v_m^0 \cos \omega\, t\ u_m(x)$, con las siguiente características:

- Sus amplitudes v_m^0 dependen de los **funciones propias** u_m, pues son las proyecciones de v^0 sobre u_m.
- Sus frecuencias ω_m dependen de los **valores propios** λ_m escalados por el invero de la densidad ρ.

Se concluye esta sección mostrando en el Cuadro 3 un resumen comparativo de las soluciones de los modelos discreto y continuo.

	CASO DISCRETO: Masas–resortes	CASO CONTINUO: Barra elástica
Modelo de equilibrio	$A\,\mathbf{u} = \mathbf{f}$, con $A = k\,D^T D$ $u_0 = u_{n+1} = 0$	$\mathcal{A}\,u = f$, con $\mathcal{A} = -k\,\frac{d^2}{dx^2}$ $u(0) = u(L) = 0$
Solución de equilibrio	$\mathbf{u}^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{\lambda_i}\,\mathbf{u}_i$ $f_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{u}_i \rangle_{\mathbb{R}^n}$	$\mathbf{u}^*(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{\lambda_m}\,u_m(x)$ $f_m = \langle f, u_m \rangle_{L^2(0,L)}$
Modelo dinámico	$m\ddot{\mathbf{u}}(t) + A\,\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}$ $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}^0$ $\dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{0}$	$\rho\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{A}u = f \qquad \left(\mathcal{A} = -k\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ $u(0) = u^0$ $\frac{\partial u(0)}{\partial t} = 0$
Solución del mod. dinámico	$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{f_i}{\lambda_i} + v_i^0 \cos \omega_i\, t\right] \mathbf{u}_i$ $v_i^0 = \langle \mathbf{u}^0 - \mathbf{u}^*, \mathbf{u}_i \rangle_{R^n}, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{\lambda_i}{m}}$	$u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{f_m}{\lambda_m} + v_m^0 \cos \omega_m t\right] u_m(x)$ $v_m^0 = \langle u^0 - u^*, u_m \rangle_{L^2(0,L)}, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{\lambda_m}{\rho}}$

Cuadro 3: Comparación de los modelos discreto y continuo. Continuación

4.3. Algunos aspectos adicionales

Se finalizarán estas notas mencionado algunos aspectos y temas relacionados al material cubierto. Estos temas no se desarrollarán en estas notas, pero vale la pena mencionarlos como posible trabajo futuro que puede complementar los temas cubiertos hasta ahora, o bien para que el lector interesado los intente desarrollar.

1. Los valores y vectores propios en el caso continuo han sido fáciles de calcular para el caso especial en que k y ρ son constantes y están dados por (56). Sin embargo, los valores y vectores propios del análogo discreto no se calcularon para el caso general con n masas. Su cálculo requiere de mayor esfuerzo que en el caso continuo, especialmente el cálculo de los valores propios [12].
2. La ecuación diferencial que modela la dinámica de una cuerda vibrante es la misma que la utilizada para modelar la dinámica de la barra y se denomina la ecuación de onda. La única diferencia es que la incógnita $u(x)$ ahora denota la desviación de la cuerda de la horizontal. En este caso la posición de equilibrio es precisamente la horizontal $u^*(x) \equiv 0$, si se desprecia la gravedad (es decir, si $f(x) \equiv 0$).

3. La solución del problema dinámico de la barra elástica generalmente se calcula por medio del *método de separación de variables* en los textos de ecuaciones diferenciales parciales. Es fácil verificar que ese método es equivalente al método que se utilizó en estas notas.

4. Se puede aplicar la misma metodología para resolver problemas de ecuaciones diferenciales parciales con otro tipo de condiciones de frontera. Debido a que los operadores diferenciales llevan implícitas las condiciones de frontera, las funciones propias asociadas al operador deberán satisfacer dichas condiciones de frontera.

5. La metodología desarrollada en estas notas también se puede aplicar a otro tipo de ecuaciones diferenciales parciales con operador diferencial lineal para el cual sea posible calcular sus funciones propias y valores propios. Por ejemplo, la ecuación de difusión de calor, la cuál es una de las ecuaciones diferenciales más importantes de la física–matemática.

Referencias

[1] Gilbert Strang, *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones*, Thomson, 2007.

[2] Gilbert Strang, *Introduction to Applied Mathematics*, Wellesley–Cambridge Press, 1986.

[3] Gene H. Golub and Charles F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, Third Edition, 1996. Colection: Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Fouth edition (2013): see http://www.cs.cornell.edu/cv/GVL4/golubandvanloan.htm

[4] K. W. Morton and D. F. Mayers, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: An Introduction*, Cambridge University Press, 2nd. edition, 2005.

[5] Martin Braun, *Differential Equations and Their Applications: An Introduction to Applied Mathematics* (Texts in Applied Mathematics), Springer; 4th edition 1993.

[6] Haim Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, Universitext series, 2011.

[7] Erwin Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley 1989.

[8] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*, Dover, 1999.

[9] F. Riesz and B. S. Nagy, *Functional Analysis*, Balkie & Sons, 1956.

[10] I. M. Gelfand and S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Dover Publications, 2000.

[11] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics. Vol. I* (First English ed.), Interscience Publishers, 1953.

[12] D. Kulkarni, D. Schmidt and S. K. Tsui, *Eigenvalues of tridiagonal pseudo-Toeplitz matrices*, Linear Algebra and its Applications, 297:63, 1999.